Die reellen Zahlen sind anders

Reinhard Winkler (TU Wien)

Zusammenfassung

Die reellen Zahlen sind deshalb anders als die übrigen fundamentalen Zahlenbereiche, weil sie nicht durch eine algebraische Konstruktion zustandekommen. Ihr Wesen lässt sich nur ordnungstheoretisch oder topologisch angemessen begreifen. Zu unterscheiden sind die Fragen nach einer einzelnen reellen (und damit auch natürlichen, ganzen, rationalen) Zahl und nach dem System $\mathbb{R}$ als Ganzes. Diesen beiden Fragen sind die ersten beiden Kapitel gewidmet. Dabei läuft die zweite Frage auf die Charakterisierung von $\mathbb{R}$ als vollständig angeordneter Körper hinaus. Die Vollständigkeit ist verantwortlich für die meisten grundlegenden Sätze der reellen Analysis. Das ist Gegenstand des dritten Kapitels, welches durch einen Satz, der die Äquivalenz zahlreicher solcher Aussagen ausspricht, zusammengefasst wird. Damit werden zahlreiche gleichrangige Facetten desselben Grundphänomens deutlich und die zentrale Rolle, die $\mathbb{R}$ in großen Teilen der Mathematik spielt, befestigt. Ein letztes Kapitel versammelt einige weitere Aspekte, die im Zusammenhang mit den reellen Zahlen nicht unterschlagen werden sollen. Bei der Darstellung ist mir eine Zusammenschau vielfältiger Phänomene wichtiger als Vollständigkeit im Detail. Deshalb führe ich Beweise, die in der Mehrzahl zum Standardstoff einer einführenden Analysis-Vorlesung gehören, kaum aus und verweise auf die Lehrbuchliteratur. Der Artikel wendet sich also nicht direkt an Schülerinnen und Schüler, sondern an Mathematiklehrerinnen und -lehrer als sachkundige Vermittler des Stoffes. Ihnen muss es überlassen bleiben, aus dem ziemlich komprimiert präsentierten Material auszuwählen und dieses für den Unterricht geeignet zu adaptieren.

1 Was ist eine einzelne relle Zahl?

1.1 Einleitende Bemerkungen

Ich erinnere mich an meine Schulzeit, als ich in einem populärwissenschaftlichen Buch erstmals den Beweis für die Abzählbarkeit der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen las und, allerdings ohne Beweis, den Satz von der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. Ich konnte das nicht glauben, weil ich mir dachte, mit Wurzeln müsse doch ein ähnliches Argument wie bei $\mathbb{Q}$ möglich sein.

Doch die reellen Zahlen sind etwas ganz Anderes! Wie grundfalsch mein Verständnis von $\mathbb{R}$ war, lehrt am überzeugendsten die Originalarbeit von Georg Cantor (1845-1918) [1], die als Geburtsstunde der Mengenlehre gilt.

Wie man zu einer beliebigen Folge reeller Zahlen $x_1, x_2 \ldots$ eine von all diesen Gliedern verschiedene reelle Zahl y erhält, zeigt Cantor mit folgendem eleganten Argument, das an die geometrische Vorstellung appelliert und ohne Dezimaldarstellung reeller Zahlen auskommt: Gibt es ein Intervall $I = (a, b)$, $a < b$, in das kein Glied der Folge fällt, so brauchen wir nur irgendeine Zahl y aus diesem Intervall herauszugreifen. Andernfalls enthält jedes Intervall sogar unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen die ersten beiden verschiedenen Werte $a_0 < b_0$ unter den Folgengliedern und betrachten das offene Intervall $I_0 = (a_0, b_0)$. Offenbar liegt keines der bisherigen Folgenglieder in I_0. Aus dem Folgenrest wählen wir die ersten beiden verschiedenen Folgenglieder, die in I_0 liegen, und nehmen sie als Randpunkte des Intervalls $I_1 = (a_1, b_1)$. Unter den folgenden Gliedern mögen die ersten beiden verschiedenen in I_1 enthaltenen das Intervall $I_2 = (a_2, b_2)$ definieren etc. Der Punkt $y = \lim_{n\to\infty} a_n$ muss von allen x_n verschieden sein.

[1] nachzulesen zum Beispiel in [1]

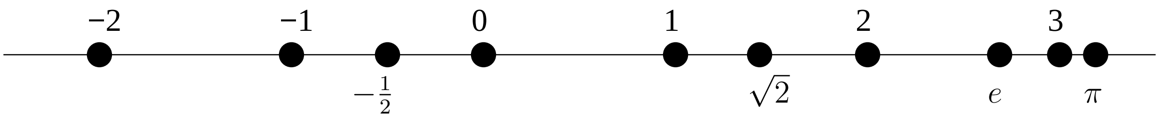
Entscheidend ist bei diesem Schluss, dass überall dort, wo eine Folge (hier die der a_n) hinstrebt, sich auch wieder eine reelle Zahl (hier y) befindet und kein Loch. Das hat (wenigstens a priori) nichts mit Wurzelziehen oder anderen algebraischen Konstruktionen zu tun, wie sie bei den Zahlenbereichserweiterungen von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Z}$, von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Q}$ und von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ bestimmend sind.

Wie kommt es, dass selbst an Mathematik interessierte Schülerinnen und Schüler, wie ich zweifellos einer war, das Wesen der reellen Zahlen derart missverstehen können?

Für den Fall, dass das auch noch heute vorkommt, versuche ich mit dem vorliegenden Artikel, Lehrerinnen und Lehrern hilfreiches Material in die Hand zu geben. Beweise werde ich nur sporadisch oder sehr skizzenhaft präsentieren. Ich verweise auf die sehr umfangreiche Lehrbuchliteratur zur reellen Analysis (z.B. ist [6] sehr empfehlenswert) bzw. auf Artikel vorzugsweise aus der vorliegenden Reihe. Wer die Lücken selbst schließen möchte, sei ausdrücklich dazu ermuntert. Meist handelt es sich um Stoff auf dem Niveau des ersten Studienjahres. Umfassenderes zum Thema sind zum Beispiel das hervorragende Buch [3] von Deiser oder der historisch bedeutende Klassiker [2] von Dedekind.

1.2 Reelle Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden

Eine kurze Antwort auf die Frage im Titel des ersten Kapitels lautet: *Eine reelle Zahl ist ein Punkt auf der Zahlengeraden.* Doch damit sind wir schon bei der unvermeidlichen Zusatzfrage: *Was ist die Zahlengerade?* Auch darauf eine kurze Antwort — in Form einer graphischen Darstellung:



Wohl ist diese Antwort unbefriedigend, weil naiv und ungenau. Doch machen bereits diese kurzen Andeutungen einen für die Mathematik charakteristischen Aspekt deutlich: Nicht das Wesen des einzelnen Elements interessiert uns primär, sondern: Erstens, wie ein einzelnes Element sich in ein umfassendes System einordnet; und zweitens, was die charakteristischen Strukturmerkmale dieses umfassenden Systems sind.

Dennoch spielen Zahlen in der Mathematik eine so fundamentale Rolle, dass wir der Frage, was sie als Einzelobjekte sind, nicht gänzlich ausweichen dürfen und ich ihr den Rest der ersten Kapitels widme. Ich werde die Zahlbereichserweiterungen nicht vollständig rekapitulieren. Hierfür gibt es viele Quellen, etwa das Standardwerk [5], das didaktische Buch [7] oder den Artikel [4]. Hier möchte ich andere Akzente setzen.

1.3 Jede natürliche Zahl ist anders

Die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ geben Kardinalitäten endlicher Mengen an. *Äpfel* sind etwas anderes als *Birnen*, dennoch haben *drei Äpfel* etwas mit *drei Birnen* gemeinsam, nämlich die Anzahl. Mathematisch ausgedrückt: Zwischen Mengen gleicher Kardinalität oder Mächtigkeit lassen sich Bijektionen finden, zwischen Mengen unterschiedlicher Kardinalität nicht. Eine Präzisierung des Zahlbegriffs sollte darauf Rücksicht nehmen. Das war Gegenstand meines vorjährigen Artikels [10]. Deshalb will ich mich hier diesbezüglich kurz fassen und andere Aspekte herausarbeiten. Abgesehen von der Bedeutung als Anzahl lässt sich die Besonderheit jeder natürlichen Zahl auch auf algebraische Weise präzisieren.

Wir fassen die natürlichen Zahlen (im Sinne der Peanoaxiome) als eine Struktur $(\mathbb{N}, 0, ')$ auf, in der das Element $0 \in \mathbb{N}$ und die Nachfolgerfunktion $' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n' = n + 1$, als spezielle Strukturmerkmale ausgezeichnet sind, und betrachten **Automorphismen** $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Allgemein sind Automorphismen **Isomorphismen** (d.h. bijektive, strukturverträgliche Abbildungen) auf sich selbst. Insbesondere lassen sie ausgezeichnete Elemente fix und sind mit Funktionen, Operationen und Relationen verträglich. In unserem Fall müssen die beiden Beziehungen $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(n') = \varphi(n)'$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Eine unmittelbare Anwendung des Induktionsprinzips zeigt, dass daraus $\varphi(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Und zwar ist die erste der beiden Voraussetzungen bereits selbst der Induktionsanfang, und die zweite rechtfertigt den Induktionsschritt $\varphi(n') = \varphi(n)' = n'$. φ ist also die identische Abbildung (Identität, symbolisch Id). Die mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{N}, 0, ')$ bezeichnete Menge aller Automorphismen der Struktur $(\mathbb{N}, 0, ')$ enthält also nur das einzige Element Id. Darin kommt zum Ausdruck, dass die natürlichen Zahlen untereinander nicht vertauscht werden dürfen, ohne das Gefüge aus Anfangselement und Nachfolgerschritt zu zerstören. Jedes Element spielt eine jeweils charakteristische Rolle, die von keinem anderen übernommen werden kann. Dies entspricht unserer Gewissheit, dass das Zählen (= Erzeugen der natürlichen Zahlen durch iteriertes Bilden von Nachfolgern, beginnend bei 0) immer denselben Verlauf nehmen muss.

Man überzeuge sich an dieser Stelle davon, dass auch die Strukturen $(\mathbb{N}, ')$, $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{N}, +)$ nur die Identität als Automorphismus besitzen. Man verwendet dabei, dass sich die Strukturverträglichkeit eines Automorphismus φ für Ordnungsstrukturen durch $\varphi(a) \leq \varphi(b) \iff a \leq b$ ausdrückt, für algebraische Strukturen durch $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Etwas anders liegen die Dinge bei $(\mathbb{N}, \cdot)$, der multiplikativen Halbgruppe. Denn bezüglich der Multiplikation spielen alle Primzahlen dieselbe Rolle. Ist π eine beliebige Permutation der Menge $\mathbb{P}$ aller Primzahlen, so lässt sich π (eindeutig) zu einem Automorphismus φ von $(\mathbb{N}, \cdot)$ fortsetzen. Die Struktur der natürlichen Zahlen ist also durch die Nachfolgerfunktion ebenso eindeutig festgelegt wie durch die Ordnung oder durch die additive Struktur, nicht aber durch die multiplikative Struktur allein.

1.4 Jede ganze Zahl ist anders

$\mathbb{Z}$ wird bekanntlich konstruiert, um die Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ zu einer Gruppe zu erweitern. Dies kann im Wesentlichen nur so geschehen wie bei $\mathbb{Z}$. Präziser: Hat in einer beliebigen Gruppe G eine Kopie von $\mathbb{N}$ Platz, dann sogar eine Kopie von $\mathbb{Z}$. Eleganter lässt sich das als **universelle Eigenschaft** von $\mathbb{Z}$ zum Ausdruck bringen:

Ist G irgendeine Gruppe, in die $\mathbb{N}$ als Halbgruppe durch einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{N} \to G$ abgebildet wird, so kann φ von $\mathbb{N}$ zu einem Gruppenhomomorphismus $\Phi : \mathbb{Z} \to G$ fortgesetzt werden. Ist φ injektiv, so auch Φ.

Algebraiker bevorzugen die Darstellung als kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& G \\
\mathbb{N} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\iota"'] & \mathbb{Z} \arrow[u, dashed, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

Darin bezeichnet $\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wie üblich die Einbettungsabbildung $n \mapsto n$. Die durchgängig gezeichneten Pfeile symbolisieren die gegebenen Abbildungen, der strichlierte Pfeil jene Abbildung, deren Existenz und Eindeutigkeit behauptet wird. Bedingung dabei ist, dass das Diagramm kommutativ ist, das heißt, dass φ mit der zusammengesetzten Abbildung $\Phi \circ \iota$ übereinstimmt.

Leicht kann man daraus schließen, dass $\mathrm{Aut}_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}, +)$ nur die Identität enthält. Dabei bezeichnet $\mathrm{Aut}_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z}, +)$ die Menge jener $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +)$ mit $\varphi(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die also $\mathbb{N}$ punktweise fest lassen. (Ich werde diese Notation mit offensichtlichen Varianten weiterhin verwenden). Etwas weniger abstrakt formuliert: Eine negative ganze Zahl $-n$ ist als Lösung der Gleichung $n + x = 0$ in der Unbekannten eindeutig bestimmt und in diesem Sinne unverwechselbar.

Hingegen besteht $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +)$ aus den beiden Automorphismen Id und $\varphi : k \mapsto -k$. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, ') = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, \leq)$ enthält genau die Automorphismen $\varphi_k : n \mapsto n + k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, ist also sogar unendlich. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, 0, \leq)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, 0, ')$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ enthalten nur die Identität.

1.5 Jede rationale Zahl ist anders

Was wir uns über ganze Zahlen überlegt haben, gilt für rationale analog. Die elementaren Regeln fürs Bruchrechnen beschreiben, wie — algebraisch gesprochen — $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ als Quotientenkörper des Integritätsbereichs $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zustandekommt. Das zugehörige Diagramm lautet:

$$\begin{tikzcd} & K \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\iota"'] & \mathbb{Q} \arrow[u, dashed, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Interpretation: Wann immer in einem Körper K eine Kopie von $\mathbb{Z}$ enthalten ist, so auch eine von $\mathbb{Q}$, wobei auch die Rolle jeder einzelnen rationalen Zahl eindeutig bestimmt ist. Denn ein Bruch $\frac{p}{q}$ ist die einzige Lösung der Gleichung $qx = p$.

Wieder überlegt man sich rasch: $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \cdot)$, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, +)$ und $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bestehen nur aus der Identität. Wenn $\mathbb{Q}$ in einem umfassenden Körper K als Unterkörper enthalten ist, lassen Automorphismen von K die Teilmenge $\mathbb{Q}$ sogar punktweise fest.

Die geordnete Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ zeigt ein interessantes neuartiges Phänomen. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, \leq)$ ist nämlich insofern extrem groß, als sich jede endliche Zuordnung $a_1 \mapsto b_1, \ldots, a_n \mapsto b_n$ mit $a_1 < \ldots < a_n \in \mathbb{Q}$ und $b_1 < \ldots < b_n \in \mathbb{Q}$ zu einem Automorphismus von $(\mathbb{Q}, \leq)$ fortsetzen lässt. Dieses Phänomen wurde schon von Cantor benutzt, um die besondere Rolle von $(\mathbb{Q}, \leq)$ durch folgenden Satz zu untermauern: Jede abzählbare lineare Ordnung lässt sich als Teilordnung von $(\mathbb{Q}, \leq)$ realisieren (universelle Eigenschaft); besitzt sie überdies weder Maximum noch Minimum und liegt zwischen je zwei Elementen stets ein weiteres, ist sie zu $(\mathbb{Q}, \leq)$ sogar isomorph. Entsprechend ist auch $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \leq)$ sehr groß, insbesondere unendlich.

Wir interpretieren unsere Ergebnisse folgendermaßen: Jede rationale Zahl sieht algebraisch anders aus, ordnungstheoretisch nicht. $\mathbb{Q}$ ist ein primär algebraisches Konstrukt. Die Struktur als Köper ist so stark, dass sie außer der Identität keinen zusätzlichen Automorphismus zulässt. Die Ordnungsstruktur auf $\mathbb{Q}$ dagegen ist viel zu schwach, um einzelne rationale Zahlen mit Hilfe der ganzen Zahlen zu lokalisieren.

1.6 Algebraisch sehen viele reelle Zahlen gleich aus

Ganz anders ist die Situation bei den reellen Zahlen. Das wird oft verschleiert, wenn der berühmte indirekte Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ als Motivation für die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ herangezogen wird. Es wird dadurch nämlich der Eindruck erweckt, es gehe wieder um einen algebraischen Erweiterungsprozess. Unter einem rein algebraischen Gesichtspunkt ist aber nicht einmal $\sqrt{2}$ von $-\sqrt{2}$ zu unterscheiden [2].

Aus diesen Gründen ziehe ich hier einen andersartigen Irrationalitätsbeweis vor, nämlich den für die Eulersche Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Jede Partialsumme $s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ ist eine rationale Zahl, die sich als Bruch $s_N = \frac{k_N}{N!}$, $k_N \in \mathbb{N}$, schreiben lässt. Angenommen e wäre rational mit einer Darstellung $\frac{p}{q}$ als Bruch. Dann ließe sich die Differenz $d = e - s_q$ auf den gemeinsamen Nenner $q!$ bringen, also $d = e - s_N \geq \frac{1}{q!}$, im Widerspruch zur Abschätzung mittels geometrischer Reihe:

$$d = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{(q+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^n} = \frac{1}{q!} \frac{1}{q+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q!} \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q!}.$$

[2] Das wird durch $\varphi : a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ belegt, denn $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$. Das soll ausführlich heißen, dass φ ein Automorphismus jenes Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist, der durch Adjunktion von $\sqrt{2}$ zu $\mathbb{Q}$ zustandekommt. φ lässt alle rationalen Zahlen fest, vertauscht aber $\sqrt{2}$ mit $-\sqrt{2}$. Die Tatsache, dass dabei positive und negative Elemente vertauscht werden können, stört bei ausschließlicher Betrachtung der algebraischen Struktur nicht.

Mit deutlich größerem Aufwand, siehe z.B. [8], lässt e sich als sogar transzendent ausweisen, e löst also keine Gleichung der Bauart $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ mit $n \geq 1$ und rationalen Koeffizienten a_i. Das hat zur Folge, dass sich e in Bezug auf $\mathbb{Q}$ von anderen transzendenten Zahlen (wie etwa π) durch keine algebraische Eigenschaft unterscheiden lässt. Algebraisch ausgedrückt: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ transzendent, so sind die durch Adjunktion von x bzw. y zu $\mathbb{Q}$ entstehenden Körper $(\mathbb{Q}(x), +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}(y), +, \cdot)$ isomorph. Denn alle Elemente von $\mathbb{Q}(x)$ sind von der Bauart $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit rationalen Polynomen p und q, und $\frac{p(x)}{q(x)} \mapsto \frac{p(y)}{q(y)}$ ist ein Isomorphismus. $\mathbb{Q}(x)$ heißt deshalb auch Körper der gebrochen rationalen Funktionen über $\mathbb{Q}$.

1.7 Dennoch: Jede reelle Zahl ist anders

Wir wollen in Analogie zu bisher vorgehen. Dazu ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}, +, \cdot) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ zu untersuchen. Wie steht es damit?

Da, wie wir soeben gesehen haben, alle transzendenten Zahlen in Bezug auf $\mathbb{Q}$ algebraisch nicht zu unterscheiden sind, dächte man vielleicht an unüberschaubar viele Körperautomorphismen von $\mathbb{R}$. Überraschenderweise ist das falsch. Die Überraschung wird umso größer, wenn wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zum Vergleich mit $\mathbb{R}$ heranziehen. Bei $\mathbb{C}$ erweist sich die angedeutete Heuristik nämlich sehr wohl als tragfähig und die Gruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}, +, \cdot)$ als riesengroß. Was läuft bei $\mathbb{R}$ anders?

Der Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ erklärt sich aus einer nicht auf den ersten Blick ins Auge springenden Verbindung der algebraischen Struktur mit der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$: Eine reelle Zahl ungleich 0 ist genau dann positiv, wenn sie Quadrat ist[3]. Also bildet jedes $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}, +, \cdot)$ positive Elemente $a = b^2 > 0$ auf positive Elemente $\varphi(a) = \varphi(b)^2 > 0$ ab. Das heißt für $a > 0$ aber auch $\varphi(x + a) = \varphi(x) + \varphi(a) > \varphi(x)$, also ist φ monoton, anders ausgedrückt: $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}, +, \cdot) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, +, \cdot) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \leq)$. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \leq)$ besteht offenbar nur aus der Identität. Denn alle rationalen Zahlen bleiben durch $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \leq)$ fest, also bleibt auch den zwischen ihnen gewissermaßen eingezwängten irrationalen Zahlen nichts anderes übrig, als fest zu bleiben. Somit ist $\varphi = \mathrm{Id}$ die Identität, $\mathrm{Aut}(\mathbb{R}, +, \cdot) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \leq) = \{\mathrm{Id}\}$ einelementig.

Entscheidend wurde in diesem Schluss verwendet, dass $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt. Diese Eigenschaft können wir so formulieren: Je zwei reelle Zahlen $a < b$ unterscheiden sich dadurch, dass eine rationale Zahl q (in Wahrheit sogar unendlich viele) zwischen ihnen liegt, also $a < q < b$. Kennen wir zu einer reellen Zahl r alle rationalen q mit $q < r$ und alle mit $r < q$, so kennen wir r [4]. Anders formuliert: Eine reelle Zahl ist eine Größe, die durch ihre ordnungstheoretische Lage relativ zu jeder rationalen Zahl (kleiner, gleich oder größer) bestimmt ist.

2 Was ist das System der reellen Zahlen?

2.1 Dedekindsche Schnitte — eine formale Definition von $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$

Aus der soeben behandelten ordnungstheoretischen Sichtweise ergibt sich unmittelbar eine mögliche Definition reller Zahlen, nämlich als Dedekindsche Schnitte.

Ein **Dedekindscher Schnitt** ist eine Zerlegung (L, R) der Menge $\mathbb{Q}$ in zwei disjunkte, nichtleere Teile L und R derart, dass $l < r$ für alle $l \in L, r \in R$; außerdem möge L kein größtes Element enthalten[5]. Man beachte, dass L und R einander als mengentheoretische Komplemente bezüglich $\mathbb{Q}$ wechselseitig eindeutig festlegen. Es genügt also jeweils einen der beiden Teile zu kennen.

Die **Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen** besteht aus allen Dedekindschen Schnitten $x = (L, R)$. Wir interpretieren x als jenen Wert, der zwischen dem linken Teil L und dem rechten Teil R von $\mathbb{Q}$ liegt, also $x > l$ für alle $l \in L \subseteq \mathbb{Q}$ und $x \leq r$ für alle $r \in R \subseteq \mathbb{Q}$.

Formal ist die **Ordnung auf** $\mathbb{R}$ gegeben durch: $(L_1, R_1) \leq (L_2, R_2)$ genau dann, wenn $L_1 \subseteq L_2$.

[3] Bekanntlich ist das in $\mathbb{C}$ falsch, weil dort auch negative reelle Zahlen Quadratwurzeln besitzen.

[4] Das ist analog zum früher behandelten Umstand, dass es für die Kenntnis einer rationalen Zahl q genügt, zwei ganze Zahlen a und b zu kennen mit $bq = a$.

[5] R darf aber ein kleinstes Element besitzen.

Wir fassen $\mathbb{Q}$ **als Teilmenge von** $\mathbb{R}$ auf, indem wir jede rationale Zahl q mit dem Dedekindschen Schnitt (L_q, R_q) identifizieren, wobei $L_q = \{q' \in \mathbb{Q} : \ q' < q\}$ und $R_q = \{q' \in \mathbb{Q} : \ q' \geq q\}$. Formal korrekt müsste man von der **Einbettung** $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto (L_q, R_q)$ sprechen.

Die **Addition auf** $\mathbb{R}$ kann durch $(L_1, R_1) + (L_2, R_2) = (L, R)$ mit $L = \{l_1 + l_2 : \ l_1 \in L_1, l_2 \in L_2\}$ und $R = \mathbb{Q} \setminus L$ definiert werden. Ähnlich geht man bei der **Multiplikation auf** $\mathbb{R}$ vor, wobei wegen der Vorzeichenwechsel ein paar Komplikationen zu bedenken sind.

Damit ist $\mathbb{R}$, genauer die Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ definiert. Ist sie wirklich das, was wir wollen? Um das deutlich zu sehen, müssen wir uns über unser Wollen klar werden.

2.2 Gemeinsamkeiten von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Zum besseren Verständnis der Unterschiede zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist es zweckmäßig, zunächst festzuhalten, worin sie sich ähneln. Am schnellsten lässt sich das ausdrücken in der Feststellung: Sowohl $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ als auch $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sind **archimedisch angeordnete Körper**.

Der Begriff **Körper** bezieht sich ausschließlich auf die algebraische Struktur: $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper, wenn $(K, +)$ abelsche (=kommutative) Gruppe (mit neutralem Element $0 = 0_K$ und Inversen $-x$ zu x) ist, $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ebenfalls abelsche Gruppe (mit neutralem Element $1 = 1_K$ und Inversen x^{-1} zu $x \neq 0$), und außerdem das Distributivgesetz gilt.

Man spricht von einem **angeordneten Körper**, wenn zusätzlich eine lineare Ordnung $\leq$ auf K vorliegt (für alle $x, y \in K$ gilt genau eine der Möglichkeiten $x < y$, $x = y$ oder $x > y$), die außerdem mit der algebraischen Struktur verträglich ist, d.h. es müssen die **Monotoniegesetze** gelten: $x \leq y$ impliziert $x + a \leq y + a$ und $xa \leq ya$, zweiteres nur sofern $a \geq 0$.

$K \setminus \{0\}$ zerfällt in die Mengen $K^+ = \{x \in K : \ x > 0\}$ der positiven und $K^- = \{-x : \ x \in K^+\}$ der negativen Elemente derart, dass K^+ abgeschlossen ist bezüglich $+$ und $\cdot$. Es gilt $x < y$ genau für $y - x \in K^+$. (Über so eine Zerlegung $K = K^+ \cup \{0\} \cup K^-$ kann auch umgekehrt $\leq$ definiert werden.)

Als geordnete Mengen tragen angeordnete Körper auch eine natürliche **Topologie**. Diese ist dadurch festgelegt, dass genau jene Mengen als offen erklärt werden, die sich als (leere, endliche oder unendliche) Vereinigung offener **Intervalle** $(a, b) = \{x : \ a < x < b\}$ ergeben.

Die **archimedische Eigenschaft** eines angeordneten Körpers K besagt, dass die Teilmenge $\mathbb{N}_K \subseteq K$, genauer die Menge der Elemente $0_K, 1_K, 1_K + 1_K = 2_K, 1_K + 1_K + 1_K = 3_K, \ldots$ in K unbeschränkt ist oder, äquivalent, dass es zu jedem $x \in K$ ein $n_K \in \mathbb{N}_K$ mit $n_K \geq x$ gibt.

Interessanter als formale Beweise, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ tatsächlich archimedisch angeordnete Körper sind, ist es, den Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ herauszuarbeiten. Als Vorbereitung dazu noch ein Zwischenspiel.

2.3 Beispiel eines nichtarchimedisch angeordneten Körpers

Der Körper $K = \mathbb{Q}(x)$ der gebrochen rationalen Funktionen lässt sich leicht zu einem angeordneten Körper machen. Man braucht als positive Elemente nur jene $r(x) \in \mathbb{Q}(x)$ zu nehmen, die $r(q) > 0$ für hinreichend große $q \in \mathbb{Q}$ erfüllen. Das Element $x \in \mathbb{Q}(x)$, ist bezüglich der dadurch definierten Ordnung größer als jede konstante Funktion mit Wert $n_K \in \mathbb{N}_K$, also ist $K = \mathbb{Q}(x)$ nichtarchimedisch angeordnet [6].

Durch Iteration und Variation dieser Konstruktion lassen sich nichtarchimedisch angeordnete Körper beliebiger Kompliziertheit konstruieren. Prominente Beispiele nichtarchimedisch angeordneter Körper tauchen in der Nonstandard-Analysis auf, vgl. Abschnitt 4.2.

Im Gegensatz zum nichtarchimedischen Fall ist es leicht, einen sinnvollen Überblick über alle archimedisch angeordneten Körper zu bekommen. Es zeigt sich nämlich, dass sie sich alle als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auffassen lassen. Um das einzusehen, brauchen wir wenigstens ein wesentliches Charaktersitikum von $\mathbb{R}$.

[6] Wertet man dagegen die Funktion $r(x) \in \mathbb{Q}(x)$ an einer festen transzendenten Stelle aus, z.B. an e oder π, so induziert die Ordnung auf $\mathbb{R}$ eine archimedische Anordnung des Körpers $\mathbb{Q}(x)$.

2.4 Ein entscheidender Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$: Die Supremumseigenschaft

Die **Supremumseigenschaft einer linear geordneten Menge** $(M, \leq)$ lässt sich so formulieren: Wann immer eine nichtleere Teilmenge $T \subseteq M$ nach oben beschränkt ist (d.h. eine obere Schranke in M besitzt, das ist ein $m \in M$ mit $t \leq m$ für alle $t \in T$), dann gibt es unter allen oberen Schranken von T eine kleinste, das sogenannte Supremum $\sup T$.

In angeordneten Körpern folgt aus der Supremumseigenschaft die analoge Aussage für Infima: Ist T nicht leer und nach unten beschränkt, so ist $-T = \{-t : \ t \in T\}$ nicht leer und nach oben beschränkt, besitzt also ein Supremum, und $\inf T = -\sup(-T)$. Angeordnete Körper mit Supremums- und Infimumseigenschaft heißen auch **vollständig angeordnet**.

Die Konstruktion von $\mathbb{R}$ mittels Dedekindscher Schnitte zeigt unmittelbar, dass $(\mathbb{R}, \leq)$ — im Gegensatz zu $(\mathbb{Q}, \leq)$ — die Supremumseigenschaft besitzt: Sei (L, R) obere Schranke einer nichtleeren Menge $T \subseteq \mathbb{R}$. Wir schreiben die Elemente $t \in T$ als Dedekindsche Schnitte $t = (L_t, R_t)$ an. Ist $q \in R \subseteq \mathbb{Q}$, so liegt q in keinem L_t, $t \in T$, also auch nicht in $L_0 = \bigcup_{t \in T} L_t$. Es ist unmittelbar klar, dass $t_0 = (L_0, R_0)$ mit $R_0 = \mathbb{Q} \setminus L_0$ das gesuchte Supremum $\sup T$ ist.

Nur archimedisch angeordnete Körper können die Supremumseigenschaft besitzen. Wäre nämlich $\mathbf{K} = (K, +, \cdot, \leq)$ ein nichtarchimedisch angeordneter Körper mit der Supremumseigenschaft, so wäre $\mathbb{N}_K \subseteq K$ beschränkt und hätte somit ein Supremum s. Das hieße $s \geq n_K$ für alle $n_K \in \mathbb{N}$, jedoch $s - 1 < n_K$ für mindestens ein $n_K \in \mathbb{N}_K$, also auch $s < n_K + 1_K \in \mathbb{N}_K$, Widerspruch.

2.5 Archimedisch angeordnete Körper als Unterkörper von $\mathbb{R}$

Die Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ reicht aus, um schnell zu sehen, dass jeder archimedisch angeordnete Körper als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auftritt. Genauer: Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper, so gibt es genau einen Unterkörper $U \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen und eine Abbildung $\varphi : K \to U$, die Isomorphismus sowohl bezüglich der algebraischen Operationen $+$ und $\cdot$ als auch bezüglich der Ordnung $\leq$ ist.

Beweisskizze: Ganz ählich wie $\mathbb{N}$ in Gestalt von $\mathbb{N}_K$ als Teilmenge von K auftritt, so liegt auch $\mathbb{Q}$ in Gestalt eines Unterkörpers $\mathbb{Q}_K$ in K. Jedes Element $q_K \in \mathbb{Q}_K$ entspricht demnach eindeutig einer rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$, die wir als Bild $\varphi(q_K) = q$ nehmen. Wegen der archimedischen Eigenschaft von K gibt es zu jedem $x \in K$ größere und kleinere Elemente aus $\mathbb{Q}_K$. Mit anderen Worten: Die beiden Mengen $L_q(K) = \{q_K \in \mathbb{Q}_K : \ q_K < x\}$ und $R_q(K) = \{q_K \in \mathbb{Q}_K : \ q_K \geq x\}$ sind nicht leer. Ihre Bilder $L_x = \{\varphi(q_K) : \ q_K \in L_q(K)\}$ und $R_x = \{\varphi(q_K) : \ q_K \in R_q(K)\}$ definieren einen Dedekindschen Schnitt (L_x, R_x), den wir als Bild $\varphi(x)$ nehmen. $U = \varphi(K) = \{\varphi(x) : \ x \in K\}$ ist der gesuchte Unterkörper. Der Nachweis, dass $\varphi : K \to U$ injektiv ist, verwendet nochmals die archimedische Eigenschaft: Für $0_K < x < y \in K$ garantiert sie nämlich ein $q_K \in \mathbb{Q}_K$ mit $0_K < (y - x)^{-1} < q_K$, also $0_K < q_K^{-1} < y - x$, und ein minimales $n_K \in \mathbb{N}_K$ mit $y \leq n_K q_K^{-1}$. Es folgt $x < (n_K - 1) q_K^{-1} < y \leq n_K q_K^{-1}$ und daraus $(n-1)q^{-1} \in L_y \setminus L_x$, also $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Ich verzichte hier auf den etwas langwierigen aber nicht schwierigen Nachweis aller übrigen Eigenschaften sowie der Eindeutigkeit von U und φ.

2.6 Axiomatik und Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Führt man die reellen Zahlen axiomatisch ein, nicht als Dedekindsche Schnitte oder ähnlich (siehe Abschnitt 4.1), so meist, indem man fordert, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ sei ein angeordneter Körper mit der Supremumseigenschaft. Das ist insofern sehr befriedigend, als damit alles festgelegt ist. Denn angeordnete Körper mit der Supremumseigenschaft sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, nämlich isomorph zu $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Der Beweis ist leicht: Hat der angeordnete Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ die Supremumseigenschaft, so ist er archimedisch angeordnet (siehe Ende von Abschnitt 2.4), daher vermittels eines Isomorphismus $\varphi : K \to U$ zu einem Unterkörper U von $\mathbb{R}$ isomorph (siehe Abschnitt 2.5). Wäre $x \in \mathbb{R} \setminus U$, so wäre die Menge L_x aller $k \in K$ mit $\varphi(k) < x$ in K nach oben beschränkt ohne Supremum, Widerspruch. Also ist $U = \mathbb{R}$ und der Satz bewiesen.

3 Die reellen Zahlen als Charakteristikum der Analysis

3.1 Viele entscheidende Unterschiede zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Wir haben die Supremumseigenschaft als eine Möglichkeit identifiziert, den entscheidenden Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zum Ausdruck zu bringen. Eine unmittelbare Folgerung der Supremumseigenschaft ist der Satz, dass in $\mathbb{R}$ jede **monoton** wachsende und **beschränkte** Folge **konvergiert**, nämlich gegen das Supremum der Folgenglieder. Dieser Satz gilt in keinem nicht zu $\mathbb{R}$ isomorphen angeordneten Körper. Der Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zeigt sich aber auch in zahlreichen anderen Phänomenen, die in der Analysis eine fundamentale Rolle spielen. Um den Blick aufs Ganze zu unterstützen und nicht auf einen speziellen Aspekt, möchte ich mehrere Charakterisierungen der reellen Zahlen gleichrangig nebeneinander stellen. Jede für sich stellt eine wesentliche Facette desselben schillernden Phänomens $\mathbb{R}$ dar. Die einzelnen Abschnitte können aber auch weitgehend unabhängig voneinander und in beliebiger Reihenfolge gelesen werden.

3.2 Unendliche Dezimalbrüche

Der elementarste Zugang zur charakteristischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ lautet: Jedem **unendlichen Dezimalbruch** $a_0, a_1 a_2 \ldots$, ($a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, 9\}$) entspricht genau eine (nichtnegative) **reelle Zahl**, nämlich der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Auch dieser vertraute Sachverhalt liegt an der Supremumseigenschaft und zeichnet $\mathbb{R}$ unter allen archimedisch angeordneten Körpern K aus, weil ohne Supremumseigenschaft nicht jede unendliche Summe obiger Art einen Grenzwert in K hat. Im nichtarchimedischen Fall dagegen besitzen nicht alle Elemente Dezimaldarstellungen im üblichen Sinn.

Selbstverständlich wäre statt $b = 10$ auch jede andere natürliche Zahl $b \geq 2$ als Basis einer Zifferndarstellung mit einer analogen Charakterisierung von $\mathbb{R}$ geeignet. Nicht nur die unvermeidliche Willkür bei der Wahl von b lässt uns nach alternativen, strukturorientierteren Charakterisierungen Ausschau halten.

3.3 Intervallschachtelungen

Oft wird statt der Supremumseigenschaft der **Satz von der Intervallschachtelung** zur Axiomatisierung der reellen Zahlen verwendet: Sind $I_n = [a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : \ a_n \leq x \leq b_n\}$ Intervalle mit $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$, so ist ihre Schnittmenge nicht leer.

Wegen $\sup\{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ folgt dieser Satz direkt aus der Supremumseigenschaft. Man überlegt sich auch unmittelbar, dass der Satz für nicht zu $\mathbb{R}$ isomorphe archimedisch angeordnete Körper nicht gilt. Für manche nichtarchimedische Körper muss man für Gegenbeispiele jedoch den Begriff der Intervallschachtelung geeignet verallgemeinern.

3.4 Vollständigkeit als metrischer Raum

Auf jeder Teilmenge von $\mathbb{R}$, insbesondere auf Unterkörpern, wegen 2.5 also auf beliebigen archimedisch angeordneten Körpern definiert $d(x, y) = |x - y|$ eine **Metrik**[7], die wir die **natürliche Metrik** nennen. Sehr entscheidend für die reelle Analysis ist, dass $\mathbb{R}$ bezüglich dieser natürlichen Metrik **vollständig** ist [8]. Nach Definition heißt dies, dass jede **Cauchyfolge** konvergiert, d.h. einen Grenzwert innerhalb der betrachteten Menge besitzt [9]. Auch diese metrische Vollständigkeit gilt ausschließlich in zu $\mathbb{R}$ isomorphen archimedisch angeordneten Körpern. Die Frage, wie es sich im nichtarchimedischen Fall verhält, ist hinfällig, weil keine natürliche Metrik definiert ist.

---

[7] Zur Erinnerung die drei Eigenschaften einer Metrik: Nichtnegativität, Symmetrie und Dreiecksungleichung

[8] Als typisches Anwendungsbeispiel erwähne ich das Majorantenkriterium für konvergente Reihen.

[9] Definitionsgemäß heißt x Grenzwert der Folge $x_1, x_2, \ldots$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt derart, dass alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $d(x, x_n) < \varepsilon$ erfüllen. Im Gegensatz dazu fordert man von einer Cauchyfolge, dass für alle $n_1, n_2 \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$ gilt. Ganz allgemein in metrischen Räumen ist jede konvergente Folge eine Cauchyfolge, aber nicht umgekehrt.

3.5 Zwischenwertsatz — Zusammenhang

In gleichem Maße anschaulich evident wie auch wichtig in der elementaren reellen Analysis ist der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen. Es stellt sich die Frage, ob er in anderen angeordneten Körpern als $\mathbb{R}$ gelten kann. Also: Sei $f : [a, b] \to K$, $a < b \in K$, stetig. Folgt daraus, dass f alle Elemente von K zwischen $f(a)$ und $f(b)$ als Werte annimmt?

Formale Beweise des Satzes für $K = \mathbb{R}$ sind mit Hilfe der Supremumseigenschaft genauso möglich wie mit Hilfe einer der äquivalenten Eigenschaften. Der Nachweis, dass $\mathbb{R}$ der einzige[10] angeordnete Körper (archimedisch oder nichtarchimedisch) ist, wo der Satz gilt, ist eine reizvolle Aufgabe, die ich hier nicht vorwegnehmen möchte.

Der Hintergrund des Zwischenwertsatzes ist ein topologischer. Definitionsgemäß heißt ein topologischer Raum X **zusammenhängend**, wenn es keine zwei nichtleeren offenen Teilmengen gibt, als deren disjunkte Summe sich X darstellen lässt. Für eine Teilmenge $T \subseteq X$ hat man sich auf die Spurtopologie auf T zu beziehen, wo genau die Mengen $T \cap O$, O offen in X, als offen gelten.

In der reellen Analysis zeigt man, dass in $\mathbb{R}$ genau die verallgemeinerten Intervalle, d.h. die konvexen Teilmengen zusammenhängend im topologischen Sinne sind. Dabei heißt $I \subseteq \mathbb{R}$ konvex, wenn aus $a < b \in I$ stets $[a, b] \subseteq I$ folgt. (Die schwierigere Implikation ist das Hinreichen der Konvexität.) Daraus lässt sich folgern, dass in echten Unterkörpern von $\mathbb{R}$ nur einpunktige Mengen zusammenhängend sind. Letzteres ist auch im nichtarchimedisch angeordneten Körpern der Fall.

Damit ist ein weiteres Charakteristikum von $\mathbb{R}$ unter allen angeordneten Körpern gefunden, nämlich der topologische Zusammenhang.

Der Vollständigkeit halber will ich noch die Verbindung mit dem Zwischenwertsatz etwas genauer in Erinnerung rufen: Stetigkeit bedeutet, dass Urbilder offener Mengen wieder offen sind. Unmittelbare Anwendung auf die Definition von Zusammenhang zeigt, das sich dieser auf stetige Bilder vererbt. Damit folgt die Behauptung aus der Charakterisierung zusammenhängender Mengen in $\mathbb{R}$ durch Konvexität.

Der Zwischenwertsatz kann nur auf zusammenhängenden Mengen gelten. Gibt es nämlich eine nichttriviale Zerlegung in zwei offene Mengen I_a und I_b, so ist jene Funktion, die auf I_a den Wert -1 annimmt, auf I_b den Wert 1, stetig und verletzt bei $a \in I_a$ und $b \in I_b$ den Zwischenwertsatz. Insbesondere gilt der Zwischenwertsatz weder in echten Unterkörpern von $\mathbb{R}$, noch in nichtarchimedisch angeordneten Körpern.

3.6 Bolzano-Weierstraß — Folgenkompaktheit

Vieles in der reellen Analysis lässt sich (auch) mit dem **Satz von Bolzano-Weierstraß** beweisen. Er lautet: Jede beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. [11]

Der Beweis beruht auf dem berühmten Argument der schrittweisen Halbierung von Intervallen, in denen unendlich viele Folgenglieder liegen, und die sich auf den gesuchten Grenzwert einer Teilfolge zusammenziehen.

In der Topologie heißen Räume, in denen jede Folge einen Häufungspunkt besitzt, **folgenkompakt**. Also sind abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}$ folgenkompakt. Auch das ist in allen nicht zu $\mathbb{R}$ isomorphen angeordneten Körpern falsch.

3.7 Satz vom Maximum — Kompaktheit — Heine-Borel

Eine ähnlich wichtige Rolle wie Zwischenwertsatz und Bolzano-Weierstraß spielt in der reellen Analysis der **Satz vom Maximum**: Jede reellwertige stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall nimmt ein Maximum und ein Minimum an.

Abgesehen von seiner offensichtlichen Bedeutung für Extremwertprobleme erinnere ich daran, dass der Satz vom Maximum auch in den Satz von Rolle einfließt und somit in den Mittelwert-

[10] natürlich nur bis auf Isomorphie

[11] Klarerweise folgt daraus insbesondere auch, dass jede unendliche beschränkte Teilmenge einen Häufungspunkt besitzt.

satz der Differentialrechnung, der sich wiederum zum Satz von Taylor verallgemeinern lässt, dem wahrscheinlich wichtigsten Satz der reellen Differentialrechnung in einer Unbestimmten. Auch im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung spielt der Satz vom Maximum (in einem Teil via Mittelwertsatz) eine unverzichtbare Rolle.

So wie beim Zwischenwersatz der Zusammenhang, ist beim Satz vom Maximum die Kompaktheit der abstrakt topologische Hintergrund. Wieder zur Erinnerung: Eine Teilmenge X eines topologischen Raumes heißt **kompakt**, wenn aus $X \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ mit offenen Mengen O_i stets folgt, dass schon endlich viele dieser O_i ganz X überdecken: $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$.

Der **Satz von Heine-Borel** besagt, dass eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ genau dann diese Eigenschaft besitzt, wenn sie **beschränkt und abgeschlossen** ist. Es ist relativ leicht zu zeigen, dass kompakte Teilmengen sogar beliebiger metrischer Räumen stets beschränkt und abgeschlossen sein müssen. Die Umkehrung ist der anspruchsvollere Teil, im Falle von $\mathbb{R}$ aber auch nicht sehr schwierig, sobald die entscheidende Idee gefunden ist: Für eine vorgegebene offene Überdeckung von X betrachtet man das Supremum aller x, für die $X \cap (-\infty, x]$ endlich überdeckt werden kann.

Man nennt einen topologischen Raum X **lokalkompakt**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder offenen Menge O, die x enthält, eine kompakte Menge K und eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subseteq K \subseteq O$. $X = \mathbb{R}$ hat diese Eigenschaft. Ist nämlich O offen und $x \in O$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq O$, und $U = (x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2)$ sowie $K = [x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2]$ haben die geforderten Eigenschaften. Alle anderen angeordneten Körper sind nicht lokalkompakt.

Abschließend noch die Beweisidee für den Satz vom Maximum, demselben Muster wie beim Zwischenwertsatz folgend: Kompaktheit überträgt sich auf stetige Bilder, also muss der Wertebereich (wegen der Beschränktheit) Supremum und Infimum besitzen, die (wegen der Abgeschlossenheit) sogar Maximum und Minimum sind.

3.8 Ein zusammenfassendes Theorem

Sei $\mathbf{K} = (K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. $\mathbf{K}$ ist isomorph zum angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ der reellen Zahlen.
2. $(K, \leq)$ besitzt die Supremumseigenschaft, d.h. nichtleere nach oben beschränkte Teilmengen besitzen stets ein Supremum.
3. $\mathbf{K}$ ist ein vollständig angeordneter Körper, d.h. nichtleere beschränkte Teilmengen besitzen stets Supremum und Infimum.
4. Jede monotone beschränkte Folge in K besitzt dort einen Grenzwert.
5. $\mathbf{K}$ ist archimedisch angeordnet, und die natürliche Metrik ist vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.
6. $\mathbf{K}$ ist archimedisch angeordnet, und es gilt der Satz von der Intervallschachtelung: Ist $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ eine Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subseteq K$ mit $a_n < b_n$, so ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ nicht leer. (Im nichtarchimedischen Fall muss man einen allgemeineren Begriff von Intervallschachtelung verwenden.)
7. $\mathbf{K}$ ist archimedisch angeordnet, und jeder unendliche Dezimalbruch stellt ein Element von K dar.
8. In $\mathbf{K}$ gilt der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.
9. Intervalle in $\mathbf{K}$ sind zusammenhängend im topologischen Sinn.
10. K ist zusammenhängend im topologischen Sinn.
11. In $\mathbf{K}$ gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.

12. Abgeschlossene Intervalle in **K** sind folgenkompakt.
13. In **K** gilt der Satz von Heine-Borel: Abgeschlossene Intervalle sind kompakt im topologischen Sinn, d.h. jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
14. **K** ist lokalkompakt.

4 Weitere Aspekte

4.1 Alternative Konstruktionen

Eingeführt habe ich die reellen Zahlen am Beginn von Kapitel 2 mittels Dedekindscher Schnitte. Das scheint mir am geradlinigsten an der Grundidee anzuschließen: Eine reelle Zahl ist ein bestimmter Punkt auf der Zahlengerade und deshalb vor allem ordnungstheoretisch bestimmt.

Andererseits habe ich in Kapitel 3 betont, dass das Wesentliche an $\mathbb{R}$ in der Gesamtheit mehrerer für die Analysis fundamentaler Eigenschaften liegt, die jede für sich ebenfalls $\mathbb{R}$ festlegen. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass es neben Dedekindschen Schnitten auch andere Konstruktionen gibt, die auf jeweils eine dieser Eigenschaften abzielen. Dazu das Wichtigste im Überblick.

Stellt man den Begriff des vollständigen metrischen Raums in den Mittelpunkt, liegt es nahe, von Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ auszugehen. Da verschiedene Cauchyfolgen denselben Grenzwert haben können, muss man sie in Klassen zusammenfassen. Dabei sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ äquivalent, wenn $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Jede der so definierten Äquivalenzklassen definiert eine reelle Zahl. Klassen, die eine konstante Folge enthalten, werden als rationale Zahl interpretiert. Vorteile dieser Konstruktion: Sie funktioniert für beliebige metrische Räume, und die algebraische Struktur lässt sich sehr leicht übertragen. Nachteile: Bei sorglosem Vorgehen ist die Konstruktion zirkulär, weil im Begriff des metrischen Raumes die Menge $\mathbb{R}$ schon als Wertebereich der Metrik vorkommt. Außerdem hat man mit ziemlich unhandlichen Objekten (Äquivalenzklassen von Folgen) zu tun.

Ähnlich kann man von Intervallschachtelungen ausgehen, die man zu Äquivalenzklassen zusammenfasst. Die Grundideen orientieren sich an der Konstruktion mittels Cauchyfolgen, die rigorose Durchführung ist aber eher noch schwerfälliger.

Wer Abstraktion scheut, bevorzugt vielleicht die Konstruktion über unendliche Dezimalbrüche. Das Beispiel $1{,}000\ldots = 0{,}999\ldots$ zeigt, dass auch hier Identifikationen äquivalenter Elemente vorgenommen werden müssen, wenn auch nur in abzählbar vielen Fällen und von jeweils nur zwei Elementen. Wirklich ärgerlich wird eine rigorose Definition der Operationen. Es bleibt einem nämlich nicht erspart, Additions- und Multiplikationsalgorithmen sorgfältig zu formulieren und zu untersuchen. Das kann durchaus interessant sein. Für unser Thema jedoch, das nicht primär die Analyse von Algorithmen ist, ist das kein Weg, den wir beschreiten wollen; ein wenig Abstraktion ist einem, sofern man an Grundlagen interessiert ist, schon viel lieber!

Abschließend möchte ich noch auf eine Konstruktion hinweisen, die in [3] vorgestellt wurde. Dabei wird mit gewissen Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gearbeitet, die der Autor *Hänge* nennt. Bemerkenswert ist, dass dabei $\mathbb{Q}$ nicht benötigt wird.

4.2 Reell abgeschlossene Körper — Eine vollständige und entscheidbare Theorie

Aus der Sicht der mathematischen Logik hat die Axiomatisierung von $\mathbb{R}$ als vollständig angeordneter Körper einen Schönheitsfehler: Im Begriff der ordnungstheoretischen Vollständigkeit ist von Teilmengen die Rede, nicht nur von Elementen. Das entspricht einer sogenannten *Prädikatenlogik zweiter Stufe*, wo im Gegensatz zur *Prädikatenlogik erster Stufe* (first order) Gödels Vollständigkeitssatz nicht gilt. Es stellt sich die Frage, ob sich die ordnungstheoretische Vollständigkeit durch eine verwandte Bedingung ersetzen lässt, in deren Formulierung keine Teilmengen vorkommen. Dies erweist sich als möglich. Und zwar kann man axiomatisch fordern, dass jedes positive Element eine Quadratwurzel hat und jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle; Eigenschaften, die $\mathbb{R}$ offenbar besitzt. Man erhält auf diese Weise die sogenannte **Theorie reell abgeschlossener Körper**. In mancherlei Hinsicht ist diese Theorie geradezu unglaublich mächtig. Nicht nur beschreibt sie $\mathbb{R}$ in vernünftiger Weise. Sie ist auch vollständig im logischen Sinn: Jede Behauptung lässt sich entweder als wahr beweisen oder als falsch widerlegen. Daraus lässt sich folgern, dass die Theorie sogar entscheidbar ist. D.h. es gibt einen Algorithmus, der von jedem in der Sprache der Theorie gegebenen Satz entscheidet, ob er wahr oder falsch ist.

Man kann zum Beispiel prominente geometrische Probleme über Kugelpackungen in der Sprache dieser Theorie formulieren. Prinzipiell könnte der Entscheidungsalgorithmus insbesondere auch einige noch ungelöste Fragen entscheiden.

Doch erwartungsgemäß gibt es einen Haken. Erstens ist der Algorithmus so aufwendig, dass man weit davon entfernt ist, ihn in interessanten Fällen wirklich laufen zu lassen. Und selbst wenn man auf eine dieser Fragen schließlich die Antwort *ja* oder *nein* bekäme, ist nicht gesagt, ob damit irgendeine Einsicht gewonnen wäre. Die eigentliche Schwäche der first order-Axiomatisierung jedoch liegt in ihrer sprachlichen Beschränkung. Schon die Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, lässt sich in diesem Rahmen nicht ausdrücken. (Sonst ergäbe sich ein Widerspruch zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz.) Auch die ordnungstheoretische Vollständigkeit und alle zu ihr äquivalenten Eigenschaften lassen sich in dieser Sprache nicht formulieren. Nur so ist die Existenz von sogenannten Nonstandardmodellen erklärbar. Obwohl sie nicht einmal archimedisch sind, lassen sie sich durch die Sprache dieser Theorie nicht von $\mathbb{R}$ unterscheiden. Es gibt aber auch abzählbare Unterkörper von $\mathbb{R}$ mit derselben Theorie.

4.3 Definierbarkeit, Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit

Ein weit verbreitetes Missverständnis lautet, irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π seien nicht absolut genau berechenbar. Manche wollen daraus sogar schließen, dass diese Zahlen gar nicht existieren. Mit diesem Irrtum muss aufgeräumt werden!

Natürlich lässt sich trefflich darüber streiten, in welchem Sinne ideale (immaterielle) Objekte überhaupt existieren. Da die Mathematik ausschließlich mit solchen zu tun hat, wäre sie überfordert, diese Frage selber zu entscheiden. Sie überlässt sie der Philosophie der Mathematik.

Dennoch: Ein Mathematiker, der über solche Fragen nicht einmal nachgedacht hat, vermittelt keinen sehr überzeugenden Eindruck. Vernünftiges zum Thema lässt sich gar nicht ohne profunden mathematischen Hintergrund sagen. Also überlassen wir das Feld nicht den Astrologen! Mathematisch, und nicht anders, lässt sich sehr klar argumentieren, warum sich die irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und π hinsichtlich Definierbarkeit nicht grundsätzlich von rationalen Zahlen wie $\frac{1}{3}$ unterscheiden.

Erinnern wir uns, wodurch $\frac{1}{3}$ bestimmt war: Dadurch, dass diese Zahl mit 3 multipliziert 1 ergibt[12]. Dass es ein und nur ein Objekt mit dieser Eigenschaft gibt, ist ein mathematischer Satz, der diese Definition von $\frac{1}{3}$ rechtfertigt. Nicht anders verhält es sich mit $\sqrt{2}$: Definitionsgemäß ist $\sqrt{2}$ jene positive reelle Zahl, deren Quadrat 2 ergibt. Auch hier rechtfertigt ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz die Definition. Wer dabei an die unbequeme Dezimaldarstellung denkt, macht sich das Leben schwerer als notwendig. Warum aber fühlt man sich dazu verleitet? Wohl weil man in der Lage sein möchte, die zu definierende Zahl mit anderen Zahlen, insbesondere rationalen, der Größe nach zu vergleichen. Aber auch diesbezüglich verhalten sich $\frac{1}{3}$ und $\sqrt{2}$ ähnlich. In beiden Fällen führt der Größenvergleich mit einem Bruch $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ nach wenigen elementaren Rechenoperationen zur Entscheidung.

Etwas mehr ist zur Situation bei π zu sagen, weil die rigorose Definition dieser Zahl nicht auf der Hand liegt. Dennoch führen viele Wege zum Ziel. Z.B. lehrt die Analysis, dass π die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion ist, welche die Reihendarstellung $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ besitzt. Diese Information erlaubt es, die Zahl π im Sinne einer Intervallschachtelung immer genauer einzugrenzen und beliebig viele Stellen ihrer Dezimaldarstellung zu ermitteln. Das gleiche gelingt mit einer als Bruch gegebenen rationalen Zahl q mittels Divisionsalgorithmus. Man hat beim Größenvergleich von π und q nur zu warten, bis die Darstellungen der beiden Zahlen sich unterscheiden. Weil π irrational ist, wird das mit Sicherheit irgendwann der Fall sein. Die Zahl

[12] Die natürlichen Zahlen wähle ich als unkontroversiellen Bezugspunkt.

π ist also nicht nur definierbar, sie ist auch berechenbar in einem Sinn, der der Definition reeller Zahlen als Dedekindsche Schnitte sehr gut entspricht, nämlich: Gegeben eine beliebige rationale Zahl q (durch Zähler und Nenner), so lässt sich entscheiden, ob $\pi < q$ oder $\pi > q$ ($\pi = q$ ist wegen der Irrationalität von π ja unmöglich). Analoges gilt für e und für die meisten reellen Zahlen, die einem ad hoc einfallen.

Dennoch gibt es Grenzen von Definierbarkeit, Berechenbarkeit, und Entscheidbarkeit. Ohne auf eine teilweise schwierige Exaktifizierung dieser Begriffe einzugehen, hier nur ein paar Bemerkungen.

Zur Definierbarkeit: Wie immer wir Objekte auch definieren[13], sei es mittels natürlicher oder mittels Formelsprache — in allen denkbaren Sprachen lassen sich nur abzählbar viele verschiedene Ausdrücke bilden und damit nur abzählbar viele verschiedene Objekte definieren. Reelle Zahlen gibt es aber überabzählbar viele. Also sind die allermeisten reellen Zahlen nicht definierbar. Alle, die wir explizit kennen, gehören naturgemäß zur vergleichsweise kleinen Menge der definierbaren Zahlen.

Ähnliches gilt für Berechenbarkeit. Unabhängig davon, welche technischen Definitionen wir verwenden, ist jede berechenbare Zahl erst recht definierbar (nämlich als Ergebnis ihrer Berechnung). Also gibt es nur abzählbar viele berechenbare Zahlen. Es ist denkbar, dass eine reelle Zahl definierbar, nicht aber berechenbar ist; etwa wenn in ihrer Definition eine Fallunterscheidung involviert ist, die wir nicht entscheiden können.

Tatsächlich kann es selbst im Zusammenhang mit berechenbaren Zahlen zu unentscheidbaren Fragen kommen. Verfügen wir nämlich über ein Verfahren, das uns nach und nach alle Nachkommastellen einer gewissen Zahl x liefert, so können wir x zwar beliebig gut eingrenzen, wir können aber z.B. nicht immer entscheiden, ob x rational oder irrational ist.

4.4 Zahlendarstellung und Algorithmen

Ich habe relativ wenig über die Darstellung reeller Zahlen gesagt. Aus Überzeugung! In diesem Artikel geht es mir nämlich um die strukturellen Charakteristika der reellen Zahlen. Erfahrungsgemäß werden diese durch eine Betonung von Dezimaldarstellung o.ä. eher verschleiert als erklärt. Die Verwechslung einer Zahl oder allgemeiner eines mathematischen Objektes mit seiner symbolischen Darstellung ist leider sehr weit verbreitet. Ich halte sie sogar für einen der folgenschwersten unter den häufigen Fehlern im Mathematikunterricht. Er enstpricht einem Musikunterricht, in dem man zwar Noten lesen und schreiben lernt, aber nich Musikbeispiele hört, die zeigen, was Noten überhaupt bedeuten. Mathematische Beispiele dazu habe ich in [9] behandelt. Für $\mathbb{R}$ bedeutet das: Die Vorstellung von der Zahlengeraden (Schlagwort *Kontinuum*) halte ich für viel wesentlicher als den Gedanken an irgendwelche letztlich willkürlichen Zifferndarstellungen.

Der Wert von Zifferndarstellungen besteht vor allem in der Möglichkeit, Algorithmen effektiv auszuführen. Das ist z.B. auch der Grund für die Überlegenheit unseres Positionssystems gegenüber der römischen Zahlendarstellung. Analyse von Algorithmen ist aber nicht das Thema dieses Artikels. Für uns interessanter ist der Satz, der wesentlicher Hintergrund für die übliche Darstellung reeller Zahlen ist:

Jede reelle Zahl besitzt eine Darstellung zur Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. Präziser: Für jedes reelle $x > 0$ gibt es ein $a_0 \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Elementen $a_1, a_2, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ derart, dass $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}$. Diese Darstellung ist eindeutig mit der Ausnahme, dass $x = \frac{k}{b^n}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. In diesem Ausnahmefall gibt es genau zwei Darstellungen, in denen ab einem Index n_0 für alle $n \geq n_0$ stets $a_n = b-1$ bzw. stets $a_n = 0$ gilt.

Beweisskizze: Wegen der archimedischen Eigenschaft gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq x < n+1$, also $x = n + r_1$ mit $0 \leq r_1 < 1$. Mit einem geeigneten $a_1 \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ gilt dann $x = n + \frac{a_1}{b} + r_2$, wobei $0 \leq r_2 < \frac{1}{b}$ etc. Für die Eindeutigkeitsaussage schätzt man geometrische Reihen ab.

[13]Schon in $\mathbb{N}$ ist der Begriff der Definierbarkeit ein subtiler. Interessierte mögen z.B. unter dem Schlagwort *Berry-Paradoxon* nachschlagen.

4.5 Zählen und Messen

Nicht nur Wissenschaft beginnt mit der Wahrnehmung einer vielfältigen und teils komplizierten Realität. Dem zunächst strukturlosen Nebeneinander unterschiedlicher Objekte entspricht der mathematische Begriff der Menge. Er ist so ursprünglich und tief in unserem intuitiven Denken verwurzelt, dass es eines Georg Cantor bedurfte, um ihn deutlich auszusprechen und der Mathematik einzuverleiben. Sein Gegenspieler Leopold Kronecker (1828-1891) hatte noch verkündet, Gott habe die natürlichen Zahlen geschaffen, alles andere sei Menschenwerk.

Aus heutiger Sicht stellt sich die Situation umgekehrt dar: Gott schuf — oder besser: durch unsere Wahrnehmung der Außenwelt unserem Bewusstsein unmittelbar gegeben sind die Elemente und Mengen; Menschenwerk ist dagegen die Abstraktion der natürlichen Zahlen als einheitlicher Maßstab für die Beschreibung der Anzahl von Elementen von Mengen. Allerdings findet diese Abstraktion historisch so früh in der Urgeschichte und individuell so früh in der Kindheit statt, dass uns weder kollektives noch persönliches Gedächtnis daran erinnern. Die natürlichen Zahlen sind also das erste, weitgehend noch unbewusste und selbstverständliche mathematische Modell.

Wie ordnen sich da die reellen Zahlen ein? In analoger Weise bilden sie das Modell fürs Messen, also für die Beschreibung kontinuierlicher Quantitäten. Mit gutem Grunde also beginnt das Vorwort von [3] mit der Shakespeare-Paraphrase: *Zwei große Häuser, gleich an Rang, gibt es in der Mathematik: Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *und die reellen Zahlen* $\mathbb{R}$. Die klassische reelle Analysis, insbesondere auch die Maßtheorie, zeigt, wie unermesslich weit sich die in diesem Artikel angerissenen Themen vertiefen lassen.

Literatur

[1] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer, Berlin–New York (1980), Neudruck des Originals (1932)

[2] Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Achte unveränderte Auflage (1960) des Originals (1888), auch in *Gesammelte mathematische Werke*, drei Bände, Vieweg, Braunschweig (1932)

[3] Oliver Deiser, *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die Folgen*, Springer, Berlin–Heidelberg (2007)

[4] Gerhard Dorfer, *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*, Didaktikhefte der ÖMG 30, 30-45 (1999)

[5] Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer Berlin–Heidelberg (1983)

[6] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis I+II*, B.G. Teubner Verlag (1980/81), 16.Auflage von Teil I 2006, 14.Auflage von Teil II 2008

[7] Gerald Kuba und Stefan Götz, *Zahlen*, Fischer Taschenbuch Verlag, Frankfurt am Main (2004)

[8] Serge Lang, *Algebra*, Springer, New York–Berlin–Heidelberg, Revidierte 3. Auflage (2002)

[9] Reinhard Winkler, *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*, Didaktikhefte der ÖMG 39, 155-165 (2007)

[10] Reinhard Winkler, *Wir zählen bis drei — und sogar darüber hinaus*, Didaktikhefte der ÖMG 40, 129-141 (2008)